

Overschrijdingsproblemen in Markovreeksen

Voordracht door

Prof. Dr J.H.B. Kemperman

op dinsdag 9 december 1958

Inleiding. In deze voordracht wil ik een schets geven van een aantal nieuwe methodes ter bestudering van overschrijdingsproblemen in een stationnair Markov proces. In vele gevallen leiden deze methodes tot expliciete formules voor de overeenkomstige overschrijdingswaarschijnlijkheden. Wegens tijdgebrek zal alleen het geval beschouwd worden van een stationnair Markov proces met een discrete tijd ($t=0,1,2,\dots$) en een discrete ruimte $(\dots, -1, 0, 1, 2, \dots)$, een zg. stationnaire Markovreeks. Voor slechts één speciale toepassing zijn alle details weergegeven.

1. De hoofdstelling. Zij $\{z_n, n=0,1,\dots\}$ een stationnaire Markovreeks met z_n geheel. Met andere woorden, de z_n zijn geheelwaardige stochastische variabelen, zodanig dat de voorwaardelijke waarschijnlijkheid

$$P(z_{n+1}=j | z_n=i, z_{n-1}=i_{n-1}, \dots, z_0=i_0) = P_{ij}^{(1)}$$

onafhankelijk is van n en onafhankelijk van de i_ν met $\nu < n$, (voor $n=0,1,\dots$ en voor iedere keuze der gehele getallen $i_0, \dots, i_{n-1}, i_n=i, i_{n+1}=j$). Hierbij zijn de $P_{ij}^{(1)} = P^{(1)}(i,j)$ gegeven getallen met

$$P_{ij}^{(1)} \geq 0 ; \quad \sum_j P_{ij}^{(1)} = 1.$$

Een meer aanschouwelijk beeld verkrijgt men door een "stochastisch" deeltje P in te voeren dat op het tijdstip n de positie z_n heeft, ($n=0,1,\dots$). Gegeven $z_m=i_0$ is dan de voorwaardelijke waarschijnlijkheid, dat P gedurende het tijdsinterval $[m, m+n]$ een specifieke weg $z_{m+h}=i_h$ ($h=1,\dots,n$) beschrijft, gelijk aan

$$P^{(1)}(i_0, i_1) P^{(1)}(i_1, i_2) \dots P^{(1)}(i_{n-1}, i_n).$$

We voeren verder een stochastische gebeurtenis $\mathcal{A}$ in (ook absorbtie genoemd), welke alleen kan optreden op de tijdstippen $0, 1, 2, \dots$. Zij $\mathcal{A}_n$ de gebeurtenis dat $\mathcal{A}$ optreedt op het tijdstip n ; we nemen aan dat $\mathcal{A}_n$ volledig onafhankelijk is van de $\mathcal{A}_m$ en z_m met $m < n$. Tenslotte veronderstellen we, dat

$$P(\mathcal{A}_n | z_n = i) = 1 - p_i,$$

waarin de $p_i = p(i)$ gegeven getallen zijn met $0 \leq p_i \leq 1$, ($i = \dots, -1, 0, 1, \dots$); (opmerking: als $\mathcal{A}$ optreedt op het tijdstip n dan wordt P niet ter plaatse "geabsorbeerd" doch gaat "rustig door" in de zin van de Markovreeks $\{z_n\}$).

Gegeven $z_m = i$, zij $Q_{ij}^{(n)}$ de voorwaardelijke waarschijnlijkheid dat $z_{m+n} = j$ en dat $\mathcal{A}$ op geen der tijdstippen $m, m+1, \dots, m+n-1$ optreedt; men ziet gemakkelijk in dat deze grootte niet van m afhangt. Uit de definitie van $Q_{ij}^{(n)}$ volgt

$$(1) \quad Q_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}^j; \quad Q_{ij}^{(1)} = p_i P_{ij}^{(1)}; \quad 0 \leq Q_{ij}^{(n)} \leq 1,$$

en

$$(2) \quad Q_{ik}^{(m+n)} = \sum_j Q_{ij}^{(m)} Q_{jk}^{(n)}.$$

Bijna alle in de praktijk voorkomende overschrijdingsproblemen kunnen, door een geschikte keuze van de p_i , gereduceerd worden tot een probleem betreffende de $Q_{ij}^{(n)}$.

Hoofdstelling. Zij t een vaste complexe constante, f_i een complexe functie gedefinieerd voor alle $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, zodanig dat

$$(3) \quad \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} |f_j| t^n < \infty \quad \text{voor alle } i.$$

Stel

$$(4) \quad f_i - t \sum_j P_{ij}^{(1)} f_j = g_i \quad \text{als } p_i \neq 0,$$

(anders is g_i willekeurig). Dan geldt, voor elk geheel getal i ,

$$(5) \quad f_i = \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} t^n p_j g_j + \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} t^n (1-p_j) f_j,$$

waarin beide dubbelsommen absoluut convergent zijn.

Dus, als we ter verkorting

$$(6) \quad Q_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} t^n$$

invoeren, dan is de laatste reeks absoluut convergent wanneer $f_j \neq 0$ of $\rho_j g_j \neq 0$, terwijl, voor elke i ,

$$(7) \quad f_i = \sum_j Q_{ij} \rho_j g_j + \sum_j Q_{ij} (1 - \rho_j) f_j.$$

Bewijs. Beschouw de transformatie

$$(8) \quad T_n a = \sum_j Q_{ij}^{(n)} a_j,$$

waarin $a = a_i$ een complexe functie aangeeft gedefinieerd voor alle gehele getallen i . Met $a \geq b$ zullen we aangeven dat $a_i \geq b_i$ voor alle i . Als $a \geq 0$ dan zullen we met $T_n a < \infty$ aangeven dat (8) (absoluut) convergeert voor alle i . Dus $T_n |a| < \infty$ is een voldoende voorwaarde opdat $T_n a$ bestaat. Merk op dat $T_0 a = a$, wegens (1).

Als $T_{m+n} |a| < \infty$, dan volgt uit (2), dat

$$(9) \quad \sum_j Q_{ij}^{(m+n)} a_j = \sum_j a_j \sum_h Q_{ih}^{(m)} Q_{hj}^{(n)} = \sum_h Q_{ih}^{(m)} \sum_j Q_{hj}^{(n)} a_j,$$

met andere woorden,

$$(10) \quad T_{m+n} a = T_m T_n a \quad \text{als} \quad T_{m+n} |a| < \infty.$$

Wegens (8) kan (3) geschreven worden als

$$(11) \quad \sum_{n=0}^{\infty} T_n |t^n f| < \infty,$$

dus geldt (10) voor $a = t^{m+n} f$.

Door (4) met ρ_1 te vermenigvuldigen, volgt

$$(12) \quad \rho f - T_1 t f = \rho g,$$

vgl.(1). Dus, wegens (10),

$$T_n |t^n \rho g| \leq T_n |t^n f| + T_{n+1} |t^{n+1} f|$$

en (11) impliceert

$$(13) \quad \sum_{n=0}^{\infty} T_n |t^n \rho g| < \infty.$$

De beweringen over absolute convergentie zijn een onmiddellijk gevolg van (11) en (13). Het rechterlid van (5) heeft dus zin en is gelijk aan

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n t^n \{ \rho g + (1-\rho)f \} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \{ t^n f - T_1 t^{n+1} f \} = f,$$

wegens (12), $T_n T_1 t^{n+1} f = T_{n+1} t^{n+1} f$, $T_n t^n f \rightarrow 0$ voor $n \rightarrow \infty$, (uit (11)), en $T_0 f = f$.

2. Enige toepassingen. In deze paragraaf geeft t een vast complex getal aan, voorlopig met $|t| < 1$, dus is de reeks in (6) altijd absoluut convergent. Kiest men $f_i = \delta_i^k$ dan geeft (4) dat $g_i = \delta_i^k - t P_{ik}^{(1)}$ en uit (1.7) volgt

$$(1) \quad Q_{ik} = \delta_i^k + t \sum_j Q_{ij} \rho_j P_{jk}^{(1)}.$$

Overigens volgt (1) ook direct uit (1.2), evenals

$$(2) \quad Q_{ik} = \delta_i^k + t \sum_j \rho_i P_{ij}^{(1)} Q_{jk}.$$

Zij verder

$$(3) \quad P_{ij}^{(n)} = P(z_{m+n}=j \mid z_m=i)$$

en

$$(4) \quad P_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} t^n.$$

Wanneer men, voor alle j , $\rho_j = 1$ zou kiezen dan gaan $Q_{ij}^{(n)}$ en Q_{ij} over in $P_{ij}^{(n)}$ en P_{ij} , dus (2) geeft

$$(5) \quad P_{ik} = \delta_i^k + t \sum_j P_{ij}^{(1)} P_{jk}.$$

Kies nu $f_i = P_{ik}$; wegens (5) is dan $g_i = \delta_i^k$. Verder geldt (1.3) wegens $|t| < 1$, $|f_i| \leq (1-|t|)^{-1}$ en $\sum_j Q_{ij}^{(n)} \leq 1$. Uit (1.7) volgt nu

$$(6) \quad P_{ik} = \rho_k Q_{ik} + \sum_j Q_{ij} (1 - \rho_j) P_{jk}.$$

Formule (6) heeft vele toepassingen. Wegens tijdgebrek zal ik me beperken tot een korte schets van één dezer toepassingen.

Zij bijvoorbeeld $\rho_j=1$ als $j \notin S$, waarin $S = \{y_1, \dots, y_p\}$ een eindige verzameling van gehele getallen is, (m.a.w. absorbtie kan alleen optreden wanneer P een positie $z_n \in S$ heeft). Door (6) toe te passen voor $k \in S$ vindt men (voor elke i) een systeem van p vergelijkingen, waaruit de Q_{ij} ($j \in S$) kunnen worden opgelost. Achteraf kan Q_{ij} ($j \notin S$) uit (6) berekend worden.

Aldus vindt men Q_{ij} als een expliciete rationale functie van zekere P_{hk} en ρ_k . Daarna kan $Q_{ij}^{(n)}$ uit (1.6) berekend worden. Tenslotte kan men uit

$$Q_{ij}^{(n)} = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\lambda_p=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \rho(y_1)^{\lambda_1} \dots \rho(y_p)^{\lambda_p}$$

de coëfficiënt $Q_{ij}^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ bepalen, die de voorwaardelijke waarschijnlijkheid aangeeft, gegeven $z_0=1$, dat $z_n=j$ en dat, voor $\nu=1, \dots, p$, $z_m=y_\nu$ gebeurt op precies λ_ν van de tijdstippen $m=0, 1, \dots, n-1$.

Deze methode heeft vaak succes doordat het in vele gevallen (b.v. in het discrete Ehrenfest model) niet moeilijk is de P_{hk} expliciet te bepalen.

We laten nu de eis $|t| < 1$ vervallen. Een verdere toepassing van de hoofdstelling verkrijgt men door f_i te kiezen als een eigenvector van de matrix $(P_{ij}^{(1)})$, m.a.w. zodanig dat $g_i=0$; dit principe werd het eerst toegepast door D. van Dantzig. Neem nu aan dat $P_{ij}^{(1)} = p_{j-i}$. Dan is $f_i = \xi^i$ (ξ vast) een dusdanige eigenvector met eigenwaarde $t = \psi(\xi)^{-1}$,

$$\psi(\xi) = \sum_j p_j \xi^j,$$

mits de laatste reeks convergeert en $\psi(\xi) \neq 0$. Uit de hoofdstelling volgt dat

$$(7) \quad \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)} |\xi^j \psi(\xi)^{-n}| < \infty \quad \text{voor alle } i \text{ impliceert}$$

$$(8) \quad \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \rho_j) Q_{ij}^{(n)} \xi^j \psi(\xi)^{-n} = \xi^i,$$

een generalisatie van Wald's fundamentele identiteit.

Men kan gemakkelijk praktisch toepasbare voorwaarden afleiden, die (7) en dus (8) impliceren.

3. Peter en Paul. Beschouw het volgende spel tussen Peter en Paul. Aan het begin krijgt Peter een bedrag i ($i=0,1,\dots$) van Paul. Verder, na iedere worp met een zuivere munt, krijgt Peter -1 of $+1$ van Paul al naar gelang kruis of munt bovenkomt. Zij $\underline{z}_n$ Peter's winst na n worpen, $\underline{z}_0=i$, en zij $U_1^{(n)}$ het aantal van de momenten $m=0,1,\dots,n$ dat $\underline{z}_m \leq 0$, ($0 \leq U_1^{(n)} \leq n+1$). We zijn geïnteresseerd in de waarschijnlijkheidsverdeling $U_1^{(n)}(\lambda) = P(U_1^{(n)} = \lambda)$. Chung en Feller slaagden erin de verdeling te bepalen van een grootte nauw verwant aan $U_0^{(n)}$.

We kunnen dit probleem als volgt generaliseren. Beschouw een reeks onafhankelijke geheelwaardige stochastische variabelen $\xi_1, \xi_2, \dots$ elk met dezelfde verdeling.

$$P(\xi_n = j) = p_j, \quad (j=0, \pm 1, \dots).$$

Zij verder $\underline{z}_n = i + \xi_1 + \dots + \xi_n$, ($\underline{z}_0 = i$), waarin i een vast niet-negatief geheel getal aangeeft. Dan vormen de $\underline{z}_n$ een stationnaire Markovreeks met

$$P_{ij}^{(1)} = p_{j-i}.$$

Hierin is $p_j \geq 0$, $\sum p_j = 1$. Later zullen we $\{p_j\}$ nog aan nadere beperkingen onderwerpen.

Zij verder de absorbtie $\mathcal{A}$ zodanig gekozen dat

$$(1) \quad p_j = 1 \text{ als } j > 0, \quad p_j = \rho \text{ als } j \leq 0,$$

waarin ρ een vast getal voorstelt, $0 \leq \rho < 1$. Dan geeft $\rho_j Q_{ij}^{(n)}$ de voorwaardelijke waarschijnlijkheid aan, gegeven $\underline{z}_0 = i$, dat $\underline{z}_n = j$ en dat $\mathcal{A}$ op geen der momenten $m=0,1,\dots,n$ optreedt. Dus, in verband met de definitie van $\mathcal{A}$,

$$(2) \quad \rho_j Q_{ij}^{(n)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} Q_{ij}^{(n)}[\lambda] \rho^\lambda,$$

waarin $Q_{ij}^{(n)}[\lambda]$ de voorwaardelijke waarschijnlijkheid aangeeft, gegeven $\underline{z}_0 = i$, dat $\underline{z}_n = j$ en dat $\underline{z}_m \leq 0$ gebeurt op precies λ van de ogenblikken $0,1,\dots,m$. Tenslotte geeft

$$(3) \quad U_1^{(n)}(\lambda) = \sum_j Q_{i0}^{(n)}[\lambda]$$

de gezochte voorwaardelijke waarschijnlijkheid aan, gegeven $\underline{z}_0 = i$, dat $\underline{z}_m \leq 0$ gebeurt op precies λ van de ogenblikken $0,1,\dots,m$.

Teneinde deze grootheden te bepalen, passen we de hoofdstelling toe met $0 < |t| < 1$, $f_1 = u^1$, waarbij $|u| = 1$, (t vast, u variabel). Dan is (1.3) voldaan wegens $\sum_j Q_{1j}^{(n)} \leq 1$. Verder is $g_1 = (1 - t \psi(n)) u^1$ met

$$(4) \quad \psi(u) = E(u^{\frac{1}{2}m}) = \sum_j p_j u^j.$$

Aldus volgt

$$(5) \quad u^1 = (1 - t \psi(u)) \sum_j Q_{1j} \rho_j u^1 + \sum_j Q_{1j} (1 - \rho_j) u^j,$$

waarin beide reeksen absoluut convergent zijn, terwijl

$$(6) \quad Q_{1j} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{1j}^{(n)} t^n.$$

Stel verder

$$(7) \quad F_1(u) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} Q_{1j} u^j, \quad H_1(u) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{1j} u^j,$$

waarin beide sommen absoluut convergent zijn als $|u| = 1$. Wegens (1) en (7) volgt nu uit (5)

$$(8) \quad u^1 = (1 - t \psi(u)) [\rho F_1(u) + H_1(u)] + (1 - \rho) F_1(u),$$

dus

$$(9) \quad F_1(u) = (1 - \rho t \psi(u))^{-1} [u^1 - (1 - t \psi(u)) H_1(u)],$$

mits $|u| = 1$. Neem nu aan, dat

$$(10) \quad p_j \leq C a^{-j}, \quad (j \leq 0),$$

waarin C en a positieve constanten zijn, $a < 1$.

In dit geval kan men het geldigheidsgebied van (9) uitbreiden door $F_1(u)$ analytisch voort te zetten.

Vooreerst is $F_1(u)$ analytisch voor $|u| > 1$ met inbegrip van het punt $u = \infty$. Vervolgens is $H_1(u)$ analytisch voor $|u| < 1$, continu voor $|u| \leq 1$, terwijl $H_1(0) = 0$. Tenslotte volgt uit (4) en (10) dat $\psi(u)$ analytisch is voor $a < |u| < 1$, continu voor $a < |u| \leq 1$.

Als $|u| = 1$ dan is $|\psi(u)| \leq 1$ dus bestaat er een constante R met $a < R < 1$ en $\psi(R) < |t|^{-1}$, (t was vast, $0 < |t| < 1$). Verder is

$$Q_{1j}^{(n)} \leq p_{j-1}^{(n)} = P(z_n = j \mid z_0 = 1),$$

terwijl

$$\sum_j p_j^{(n)} R^j = E(R^{\xi_1 + \dots + \xi_n}) = \psi(R)^n.$$

Wegens (6) volgt hieruit dat de reeksen in (7) absoluut convergent zijn voor $u=R$, dus is $F_1(u)$ zelfs analytisch voor $|u| > R$.

Nu geldt (9) voor $|u|=1$, terwijl beide leden van (9) continu zijn voor $R < |u| \leq 1$, analytisch voor $R < |u| < 1$, dus (9) geldt voor alle u met $R < |u| \leq 1$. Tenslotte levert (9) een analytische voortzetting van $F_1(u)$ tot het gehele gebied $|u| > a$, (zodanig dat (9) geldt), met uitsluiting van de nulpunten van $1 - \rho t \psi(u)$, waar $F_1(u)$ een pool kan hebben.

Het bovenstaande principe laat vele toepassingen toe. Teneinde het verhaal niet al te lang te maken zullen we ons nu beperken tot het geval dat

$$(10) \quad p_j = 0 \text{ als } j < -1, \quad p_{-1} > 0, \quad 0 < \rho < 1.$$

Dan is

$$(11) \quad \psi(u) = \sum_{j=-1}^{\infty} p_j u^j$$

analytisch in $0 < |u| < 1$ met een enkelvoudige pool in $u=0$. Verder geldt (10) voor elke $a > 0$, dus levert (9) een analytische voortzetting van $F_1(u)$ tot het gehele u -vlak met inbegrip van het punt $u=\infty$ doch met uitsluiting van het éénduidige nulpunt η van $1 - \rho t \psi(u)$ met $|\eta| < 1$; in het bijzonder is $F_1(u)$ rationaal. Verder, wegens (9), $i \geq 0$ en $H_1(0)=0$, hebben we $F_1(0)=0$. Zij tenslotte ξ het éénduidige nulpunt van $1 - t \psi(u)$ met $|\xi| < 1$, ($\xi \neq \eta$). Dan volgt uit (9) dat $F_1(\xi) = (1 - \rho)^{-1} \xi^i$. Bovengenoemde eigenschappen bepalen de rationale functie $F_1(u)$ eenduidig, dus

$$(12) \quad (1 - \rho) F_1(u) = (\xi - \eta) \xi^{i-1} u (u - \eta)^{-1}.$$

Verder, wegens (3), (2), (6), (1), (7), (8) en $\psi(1)=1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} U_1^{(n)}(\lambda) t^n \rho^\lambda = \sum_j \sum_{n=0}^{\infty} \rho_j Q_{1j}^{(n)} t^n$$

$$= \sum_j \rho_j Q_{1j} = \rho F_1(1) + H_1(1) = [1 - (1 - \rho) F_1(1)] (1 - t)^{-1},$$

dus uit (12)

$$(13) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\infty} U_i^{(n)}(\lambda) t^n \rho^\lambda = [1 - \xi^{i-1} + \xi^{i-1}(1-\xi)/(1-\eta)] (1-t)^{-1}.$$

Hierin is ξ eenduidig bepaald door $|\xi| < 1$,

$$t = \psi(\xi)^{-1} = \xi (p_{-1} + p_0 \xi + p_1 \xi^2 + \dots)^{-1},$$

dus $\xi = \xi(t)$ is analytisch in t ($|t| < 1$) en $\xi(0) = 0$. Verder is $\eta = \xi(\rho t)$. Laten nu de constanten $\alpha^{(\lambda)}$ en $\beta_i^{(n)}$ gedefinieerd zijn door

$$(14) \quad (1-\eta)^{-1} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \alpha^{(\lambda)} (\rho t)^\lambda,$$

en

$$(15) \quad \xi^{i-1} (1-\xi) (1-t)^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_i^{(n)} t^n$$

met $\beta_i^{(n)} = 0$ als $n < i-1$. Dan volgt uit (13)

$$(16) \quad \boxed{U_i^{(n)}(\lambda) = \alpha^{(\lambda)} \beta_i^{(n-\lambda)} \quad \text{mits} \quad \lambda \geq 1.}$$

Hierin is

$$\alpha^{(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i} \int (1-\xi)^{-1} \frac{dt}{t^{\lambda+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int (1-\xi)^{-1} \psi(\xi)^{\lambda+1} d\psi(\xi)^{-1},$$

(met een kleine cirkel om nul als integratieweg), dus is $\alpha^{(\lambda)}$ gelijk aan het residu in $u=0$ van de analytische functie $-(1-u)^{-1} \psi'(u) \psi(u)^{\lambda-1}$. Evenzo is $\beta_i^{(n)}$ gelijk aan het residu in $u=0$ van de functie $(1-\psi(u))^{-1} \psi'(u) (1-u) u^{i-1} \psi(u)^n$.

In het oorspronkelijke spel tussen Peter en Paul is

$$\psi(u) = \frac{1}{2}(u^{-1} + u) \quad \text{dus} \quad \psi'(u) = -(1-u^2)/(2u^2).$$

Dan is $\alpha^{(\lambda)}$ gelijk aan de coefficient van u^λ in de ontwikkeling van $2^{-\lambda} (1+u)(1+u^2)^{\lambda-1}$ in machten van u . Verder is $\beta_i^{(n)}$ gelijk aan de coefficient van u^{n-i+1} in de ontwikkeling van $2^{-n} (1+u)(1+u^2)^n$ in machten van u . Dus volgt uit (16):

$$(17) \quad U_i^{(n)}(\lambda) = 2^{-n} \binom{\lambda-1}{[\lambda/2]} \binom{n-\lambda}{[(n-\lambda-i+1)/2]}, \quad (\lambda \geq 1).$$

Uit (17) kan men op de gebruikelijke wijze een "boog-sinus-wet" afleiden, vgl. W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, New York (1950), p.252.